

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. CAVALLUCCI

EQUAZIONI DI EULERO NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

7 MAGGIO 1987

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di Clarke e Vinter [6], [7] sulla regolarità delle soluzioni del problema

$$(P) \quad \min \left\{ \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \mid x(\cdot) \text{ assol. continua,} \right. \\ \left. x(a) = A, x(b) = B \right\}.$$

Già Tonelli [8] si era posto il problema di provare la validità delle condizioni di Eulero-Lagrange per le soluzioni del problema (P) sotto le sue più generali condizioni di esistenza ed aveva provato che tali condizioni sono soddisfatte fuori di un sottoinsieme chiuso  $C$  di misura nulla. Tonelli è tornato più volte sull'argomento, ottenendo diverse condizioni che assicurano che  $C$  è vuoto oppure che si riduce a uno degli estremi dell'intervallo  $[a, b]$ , cfr. [9], [10], [11]. In [10] compare per la prima volta un esempio in cui  $C \neq \emptyset$ .

Questo esempio non era noto a Ball-Mizel [2] quando hanno ripreso la questione nel 1984 e hanno costruito una serie di esempi di problemi (P) per i quali si ha  $C \neq \emptyset$ . Fra l'altro hanno mostrato che  $C$  può essere un arbitrario sottoinsieme chiuso di misura nulla dell'intervallo  $[a, b]$ .

Clarke e Vinter [6], [7] hanno esteso i risultati di Tonelli e di altri (cfr. [6]) combinando le tecniche di Tonelli con l'uso del calcolo differenziale generalizzato di Clarke [4].

### 1. Supponiamo che la funzione

$$L: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

verifichi le condizioni

- (H1)  $L$  è localmente limitata,  $t \mapsto L(t, x, v)$  è misurabile per ogni  $(x, v)$  e  $v \mapsto L(t, x, v)$  è convessa per ogni  $(t, x)$ ;

(H2) per ogni  $C$  limitato in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  esiste una costante  $K$  tale che

$$|L(t, x, v) - L(t, x', v')| \leq K|(x - x', v - v')|$$

per ogni  $t$  in  $[a, b]$  e  $(x, v), (x', v')$  in  $C$ ;

(H3) esistono una costante  $\alpha$  e una funzione convessa  $\theta: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$L(t, x, v) \geq -\alpha|x| + \theta(|v|), \text{ per ogni } t, x, v,$$

$$\frac{\theta(|v|)}{|v|} \xrightarrow{|v| \rightarrow \infty} \infty.$$

Teorema 1. Sotto le condizioni (H1), (H2) e (H3) il problema (P) ha una soluzione  $x(\cdot)$ . Sia  $a \leq \tau \leq b$  tale che

$$(1) \quad \liminf_{\substack{s, t \rightarrow \tau \\ s \leq \tau \leq t \\ s \neq t}} \frac{|x(t) - x(s)|}{t - s} < \infty.$$

Allora

a) esiste un intervallo  $I$  relativamente aperto in  $[a, b]$  tale che  $\tau \in I$ ,  $x(\cdot)$  è lipschitziana su  $I$  ed esiste  $p(\cdot): I \rightarrow \mathbb{R}$  assolutamente continua per cui riesce

$$(2) \quad (\dot{p}(t), p(t)) \in \partial_{x, v} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{q.d. su } I;$$

b) se inoltre la funzione  $v \rightarrow L(t, x(t), v)$  è strettamente convessa per ogni  $t$  e la funzione  $s \rightarrow L(s, x(t), v)$  è continua per  $s = t$  e per ogni  $v$ , allora  $x(\cdot) \in C^1(I)$ ;

c) se  $L$  verifica tutte le condizioni precedenti e inoltre è di classe  $C^r$  in un intorno di  $(t, x(t), \dot{x}(t))$ , con  $r \geq 2$ , e  $L_{vv}(t, x(t), \dot{x}(t)) > 0$  [definita positiva] per

ogni  $t$  in  $[a, b]$ , allora  $x(\cdot) \in C^r(I)$ .

Abbiamo indicato con  $\partial_{x,v} L$  il gradiente generalizzato di  $L(t, \cdot, \cdot)$ . Ricordiamo che, per  $f$  localmente lipschitziana, si ha

$\partial f(x) =$  involucro convesso dell'insieme

$$\{\text{grad } f(x_i) \mid x_i \rightarrow x \text{ per } i \rightarrow \infty\}$$

Per le proprietà del gradiente generalizzato si veda [4]. Ricordiamo che se  $f$  è di classe  $C^1$  in un intorno di  $x$ , allora  $\partial f(x) = \{\text{grad} f(x)\}$ . Pertanto, se  $L(t, \cdot, \cdot)$  è di classe  $C^1$  e se  $x(\cdot) \in C^1(I)$ , da (2) segue

$$(2') \quad \frac{d}{dt} \text{grad}_v L(t, x(t), \dot{x}(t)) = \text{grad}_x L(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

quasi ovunque su  $I$ .

Prima di occuparci della dimostrazione del Teorema 1 vediamo alcune conseguenze.

Corollario 1. Esiste un sottoinsieme  $\Omega$  di  $[a, b]$  aperto relativamente ad  $[a, b]$  tale che  $\dot{x}(\cdot)$  è localmente limitata su  $\Omega$  e  $[a, b] \setminus \Omega$  ha misura nulla.

Questo segue dal fatto che  $x(\cdot)$  è derivabile q.d. su  $[a, b]$  e quindi vale (1) q.d.

Corollario 2. Se  $L$  verifica le condizioni in b), allora esiste il limite (finito o no)

$$\lim_{\substack{s, t \rightarrow \tau \\ s \leq \tau \leq t \\ s \neq t}} \frac{|x(t) - x(s)|}{t - s}$$

per ogni  $\tau$  in  $[a, b]$ .

Corollario 3. Se  $L$  verifica le condizioni in b) e  $n = 1$ , allora esiste il limite (finito o no)

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{x(t) - x(\tau)}{t - \tau} = \dot{x}(\tau)$$

per ogni  $\tau$  in  $[a, b]$ .

Il Corollario 3 contiene il Teorema di Tonelli citato in precedenza.

Per la dimostrazione dei corollari si veda [6].

Indichiamo i punti principali della dimostrazione del Teorema 1, seguendo [6].

I) L'esistenza segue dal Teorema 4.1.3. di [4].

II) Sia  $\tau$  come in (1). Allora esistono  $c \in \mathbb{R}^n$  e le successioni  $i \rightarrow s_i \leq \tau \leq t_i$  tali che  $s_i < \tau$  se  $a < \tau$ ,  $t_i > \tau$  se  $\tau < b$ ,  $s_i < t_i$  e

$$\frac{x(t_i) - x(s_i)}{t_i - s_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} c$$

Posto  $x(t) - tc = x_1(t)$ ,  $x_1(\cdot)$  risolve un problema di tipo (P) con un'altra funzione  $L$  che soddisfa ancora lo stesso tipo di condizioni. Inoltre si ha ora  $c = 0$ .

III) Si può modificare la funzione  $\theta$  e si può sostituire alla funzione  $L$  una del tipo

$$\max\{L(t, y, v), -\alpha M + \theta |v|\}$$

in modo da conservare la validità delle ipotesi (H1), (H2), (H3) e in più da avere

- (H4)      i)  $\alpha = 0$  in (H3);  
           ii)  $c = 0$  in II);  
           iii)  $0 \leq \theta(r) \leq r^2$ ,  $\theta$  è crescente,  $\theta$  è strettamente convessa per  $r$  abbastanza grande

IV) Fissiamo

$$M > \max\{|x(t)| \mid a \leq t \leq b\}$$

e poniamo

$$S = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, |y| \leq M\},$$

$$c_0 = \sup\{|L(t, y, 0)| \mid (t, y) \in S\}$$

Fissiamo  $R_0 > 0$  tale che  $\theta$  sia strettamente convessa su  $[R_0, +\infty[$  e inoltre  $\theta(R_0) > 2(1+c_0)$ .

Poniamo

$$\sigma_0 = \sup\{|z| \mid z \in \partial_v L(t, y, v), (t, y) \in S, |v| \leq R_0\}$$

e fissiamo  $R_1 > R_0$  tale che riesca

$$\theta(r) > 2r\left[1 + \sigma_0 + \frac{c_0}{R_1}\right] \quad \text{per } r \geq R_1.$$

Poniamo

$$c_1 = \sup\{|L(t,y,v)| \mid (t,y) \in S, |v| \leq R_1\}$$

$$\sigma_1 = \sup\{|z| \mid z \in \partial_v L(t,y,v), (t,y) \in S, |v| \leq R_1\}$$

e fissiamo  $R_2 > R_1$  tale che

$$\theta(R_2) > 2(c_1 + 2 R_2 \sigma_1).$$

Poniamo

$$\phi(v) = \frac{1}{2} \max\{\theta(|v|), \theta(R_2)\},$$

$$\tilde{L}(t,y,v) = \inf\{(1-r)\phi(w) + rL(t,y,u) \mid 0 \leq r \leq 1, |u| \leq R_2,$$

$$v = (1-r)w + ru\}$$

Allora si ha la seguente

Proposizione 1. Se  $(t,y) \in S$ , allora  $t \rightarrow \tilde{L}(t,y,v)$  è misurabile,  
 $v \rightarrow \tilde{L}(t,y,v)$  è convessa,  $(y,v) \rightarrow \tilde{L}(t,y,v)$  è localmente lipschitziana e per ogni  
 $z \in \partial_{y,v} \tilde{L}(t,y,v)$  si ha

$$|z| \leq K_1 + K_2 |v|$$

per certe costanti  $K_1$  e  $K_2$ . Si ha inoltre

- a)  $\tilde{L}(t,y,v) \geq \frac{1}{2} \theta(|v|),$
- b)  $|v| \leq R_1 \Rightarrow \tilde{L}(t,y,v) = L(t,y,v),$
- c)  $R_1 < |v| \leq R_2 \Rightarrow \tilde{L}(t,y,v) \leq L(t,y,v),$

$$d) \quad R_2 < |v| \Rightarrow \tilde{L}(t, y, v) = \frac{1}{2} \theta(|v|) < \theta(|v|) \leq L(t, y, v),$$

$$e) \quad \text{se } |v| \geq R_1 \text{ e } z \in \partial_v \tilde{L}(t, y, v), \text{ allora}$$

$$|z| > 1 + \sigma_0.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [6].

V) Consideriamo ora il problema

$$(P_i) \quad \min \left\{ \int_{s_i}^{t_i} \tilde{L}(t, y(t), \dot{y}(t)) dt \mid y(\cdot) \text{ ass. continua, } y(s_i) = x(s_i), \right. \\ \left. y(t_i) = x(t_i) \right\}$$

Questo problema ha una soluzione  $x_i(\cdot)$ .

Posto

$$z_i(t) = x(s_i) + \frac{t-s_i}{t_i-s_i} [x(t_i) - x(s_i)],$$

$$\mathcal{J}_i(y) = \int_{s_i}^{t_i} \tilde{L}(t, y, \dot{y}) dt, \quad J_i(y) = \int_{s_i}^{t_i} L(t, y, \dot{y}) dt,$$

si ha

$$\mathcal{J}_i(x_i) \leq \mathcal{J}_i(z_i) \leq J_i(z_i)$$

e quindi, dalla Proposizione 1,

$$\frac{1}{2} \int_{s_i}^{t_i} \theta(|\dot{x}_i(t)|) dt \leq J_i(z_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$



Di qui e dalle maggiorazioni precedenti la Proposizione 1 segue

$$\sup_{s_i \leq t \leq t_i} |x_i(t) - x(s_i)| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

e quindi, per qualche  $I_0$ ,

$$|x_i(t)| < M \quad \text{per } s_i \leq t \leq t_i, \quad i \geq I_0,$$

ossia  $(t, x_i(t)) \in S$  per  $i \geq I_0$ .

Per la Proposizione 1, al problema  $(P_i)$  è applicabile il Teorema 4.2.2. di [4] in base al quale esiste  $y_i(\cdot): [s_i, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$  assolutamente continua tale che, per  $i \geq I_0$  opportuno,

$$(-\dot{p}_i(t), \dot{x}_i(t)) \in \partial_{x,p} H(t, x_i(t), p_i(t)) \quad \text{q.d.}$$

con l'Hamiltoniana  $H$  data da

$$H(t, x, p) = \sup\{\langle p, v \rangle - \hat{L}(t, y, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Di qui, usando la Proposizione 1 ripetutamente, si ottengono le valutazioni, per  $i \geq I_1$  opportuno,

$$|\dot{p}_i(t)| \leq \text{costante} \quad \text{q.d.,}$$

$$\dot{x}_i(t) \in \partial_p H(t, x_i(t), p_i(t)) \quad \text{q.d.,}$$

$$p_i(t) \in \partial_v \hat{L}(t, x_i(t), \dot{x}_i(t)),$$

$$|x_i(t)| \leq R_1 \quad \text{q.d.,}$$

$$\mathcal{J}_i(x_i) = J_i(x_i).$$

Siccome  $x(\cdot)$  risolve (P), si ha

$$J_i(x) \leq J_i(x_i)$$

e quindi si ha

$$\mathcal{J}_i(x_i) \leq \mathcal{J}_i(x) \leq J_i(x) \leq J_i(x_i) = \mathcal{J}_i(x_i)$$

e quindi

$$\mathcal{J}_i(x) = J_i(x).$$

A causa della Proposizione 1, di qui segue

$$|\dot{x}(t)| \leq R_2 \text{ per } s_i \leq t \leq t_i, \quad i \geq I_1.$$

E' noto [4] che sotto questa condizione vale l'affermazione a) del Teorema 1.

VI) Ci mettiamo ora nelle ipotesi del Teorema 1-b). Fissiamo  $R > R_2$  e consideriamo il problema

$$(P'_i) \quad \min \left\{ \int_{s_i}^{t_i} L(t, y(t), \dot{y}(t)) dt \mid y(\cdot) \text{ ass. continua, } |\dot{y}(t)| \leq R \text{ q.d.,} \right.$$

$$\left. y(s_i) = x(s_i), y(t_i) = x(t_i) \right\}, \quad i \geq I_1,$$

di cui  $x(\cdot)$  è soluzione, per quanto visto sopra. Per questo problema valgono le condizioni generalizzate di Hamilton ([4], Teor. 4.2.2.)

$$(-p(t), \dot{x}(t)) \in {}_{x,p} \mathcal{H}(t, x(t), p(t)) \quad \text{q.d. su } [s_i, t_i],$$

con  $p(\cdot)$  assolutamente continua e

$$H(t, x, p) = \max\{\langle p, v \rangle - L(t, x, v) \mid |v| \leq R\}.$$

Ne segue che

$$\dot{x}(t) \in \partial_p(H(t, x(t), p(t))) \quad \text{q.d.}$$

e quindi che  $\dot{x}(t)$  massimizza la funzione

$$v \mapsto \langle p(t), v \rangle - L(t, x(t), v) = f(t, v), \quad |v| \leq R.$$

La funzione  $f(t, \cdot)$  è strettamente concava e perciò assume il massimo  $m(t)$  in un solo punto  $v(t)$ . Siccome  $f$  è continua, le due funzioni  $m(\cdot)$  e  $v(\cdot)$  sono continue (cfr. [1], Teor. 6, pag. 53).

Siccome  $\dot{x}(t)$  esiste q.d., coincide q.d. con  $v(t)$  ed è limitata e siccome  $v(\cdot)$  è continua, si ha che  $\dot{x}(t)$  esiste dappertutto e coincide con  $v(t)$ . Questo prova l'affermazione b).

VII) Mettiamoci ora nelle ipotesi c). Ora la (2) si può scrivere così

$$\dot{p}(t) = L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad , \quad s_i \leq t \leq t_i \quad , \quad i \geq I_1,$$

$$p(t) = L_v(t, x(t), \dot{x}(t))$$

e  $p(\cdot)$  e  $\dot{p}(\cdot)$  sono continue, dunque  $p(\cdot)$  è di classe  $C^1$  e quindi si può applicare il teorema di Dini sulle funzioni implicite per ricavare  $\dot{x}(\cdot)$  come funzione di classe  $C^1$ , se  $r = 2$ , e di classe  $C^{r-1}$  in generale.

2. Vedremo al n. 4 che può essere  $\Omega \neq [a, b]$ . Qui vogliamo indicare alcune condizioni sufficienti a precisare  $\Omega$ .

In tutto il n. 2 supporremo sempre tacitamente soddisfatta la condizione

(H<sub>2</sub><sup>1</sup>)  $L$  è localmente lipschitziana su  $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Teorema 2. Sulla soluzione  $x(\cdot)$  del problema (P) valgono le affermazioni

a) se  $L$  non dipende da  $t$ , allora  $\Omega = [a, b]$ ;

a') se per ogni aperto limitato  $S \subset \mathbb{R}^n$  esistono una costante  $c$  e una funzione  $\gamma \in L^1$  tali che

$$L_t(t, x, v) \leq c|L(t, x, v)| + \gamma(t)$$

in ogni punto  $(t, x, v) \in ]a, b[ \times S \times \mathbb{R}^n$  in cui la funzione  $L(\cdot, \cdot, v)$  è differenziabile, allora si ha  $\Omega \supset ]a, b[$ ; se vale la maggiorazione precedente con  $-L_t$  al posto di  $L_t$ , allora si ha  $\Omega \supset ]a, b]$ ;

a'') se esiste  $\gamma \in L^1$  tale che per ogni  $(\lambda_t, \lambda_x) \in \partial_{t,x} L(s, x(s), \dot{x}(s))$  riesca

$$\lambda_t \leq \gamma(s) \quad \text{q.d. su } [a, b],$$

allora si ha  $\Omega \supset ]a, b[$ ; se invece riesce  $\lambda_t \geq \gamma(s)$  per quasi ogni  $s$  in  $[a, b]$ , allora  $\Omega \supset ]a, b]$ ;

b) se per ogni aperto limitato  $S \subset \mathbb{R}^n$  esistono le costanti  $c_1$  e  $c_2$  e la funzione  $\gamma \in L^1$  tali che

$$|L_x(t, x, v)| \leq c_1 |L(t, x, v)| + c_2 |L_v(t, x, v)| + \gamma(t)$$

in ogni punto  $(t, x, v) \in ]a, b[ \times S \times \mathbb{R}^n$  in cui  $L(t, \cdot, \cdot)$  è differenziabile, allora  $\Omega = [a, b]$ ;

b') se esistono una costante  $c \geq 0$  e  $\gamma \in L^1$  tali che riesca per ogni

$$\lambda_x \in \partial_x L(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{e} \quad \lambda_v \in \partial_v L(t, x(t), \dot{x}(t))$$

$$|\lambda_x| \leq c |\lambda_v| + \gamma(t) \quad \text{q.d. in } [a, b],$$

allora si ha  $\Omega = [a, b]$ .

Teorema 3. Supponiamo  $L \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  e

$$L_{vv}(t, x(t), \dot{x}(t)) > 0 \quad \text{q.d. su } [a, b] .$$

Poniamo

$$F = L_{vv}^{-1} (L_x - L_{vt} - L_{vx} v).$$

a) Se esiste  $\gamma \in L^1$  tale che

$$|F(t, x(t), \dot{x}(t))| \leq \gamma(t)(1 + |\dot{x}(t)|) \quad \text{q.d.,}$$

allora  $\Omega = [a, b]$ .

b) Se per ogni  $(t, x, v)$  si ha

$$L(t, x, v) \geq g(x) + k|v|^{1+\alpha},$$

$$L_{vv}(t, x, v) > 0$$

con  $\alpha \geq 0$ ,  $k > 0$  e  $g$  localmente limitata, se per ogni aperto limitato  $S \subset \mathbb{R}^n$  esiste una costante  $c$  tale che

$$|F(t, x, v)| \leq c(1 + |v|^{2+\alpha})$$

per ogni  $(t, x, v)$  in  $[a, b] \times S \times \mathbb{R}^n$ , allora  $\Omega = [a, b]$ .

Le dimostrazioni di tutte le affermazioni contenute nei Teoremi 2 e 3 si basano sul seguente

Lemma 1. Sia  $u(\cdot)$  soluzione del problema (P) con  $L$  che soddisfa le condizioni (H1), (H2), (H3). Per  $t \in \Omega \cap [a, b]$  poniamo

$$t^* = \sup\{t \in ]\bar{t}, b] \mid \|\dot{x}(\cdot), L^\infty(\bar{t}, t)\| < \infty\}.$$

Allora  $x(\cdot)$  è lipschitziana su  $[\bar{t}, b]$  se vale almeno una delle seguenti due ipotesi:

$$(i) \quad \|\dot{x}(\cdot), L^\infty(\bar{t}, t^*)\| < \infty$$

(ii) Per ogni successione  $i \rightarrow t_i$  tale che

$$\bar{t} \leq t_i < t_{i+1} \rightarrow t^* \quad \text{per } i \rightarrow \infty$$

esiste una successione di funzioni  $p_i(\cdot): [\bar{t}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$  assolutamente continue ed esiste una costante  $K$  indipendente da  $i$  tale che

$$p_i(t) \in \partial_v L(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{q.d. su } [\bar{t}, t_i],$$

$$|p_i(t)| \leq K \quad \text{per } \bar{t} \leq t \leq t_i.$$

Per le dimostrazioni dei Teoremi 2 e 3 e del Lemma 1 rimandiamo a [6].

Indichiamo soltanto come l'affermazione a) del Teorema 2 segue dal Lemma.

Fissiamo  $\bar{t} \in \Omega \cap [a, b[$  e prendiamo  $t_i$  e  $t^*$  come nel Lemma 1. Per ogni  $i \geq 1$  si ha

$$1 + \|\dot{x}(\cdot), \bar{L}(\bar{t}, t_i)\| = M_i < \infty$$

e quindi  $x(\cdot)$  è soluzione su  $[\bar{t}, t_i]$  del seguente problema

$$\min \left\{ \int_{\bar{t}}^{t_i} L(y(t), \dot{y}(t)) dt \mid y(\cdot) \text{ ass. continua, } y(\bar{t}) = x(\bar{t}), y(t_i) = x(t_i), \right. \\ \left. |\dot{y}(t)| \leq M_i \text{ q.d.} \right\}.$$

Per il Teorema 5.2.3 di [4] esiste una funzione  $p_i(\cdot): [\bar{t}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}$  assolutamente continua, non identicamente nulla e tale che

$$\dot{p}_i(t) \in \partial_x L(x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{q.d. su } [\bar{t}, t_i],$$

$$h_i = p_i(t) \cdot \dot{x}(t) - L(x(t), \dot{x}(t)) = \max_{|v| \leq M_i} [p_i(t) \cdot v - L(x(t), v)] ,$$

con  $h_i = \text{costante}$ .

Per la convessità di  $L(x, \cdot)$  e poiché  $M_i > |\dot{x}(t)|$ , di qui segue

$$p_i(t) \in \partial_v L(x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{q.d.}$$

e quindi che

$$h_i = p_i(t) \cdot \dot{x}(t) - L(x(t), \dot{x}(t)) \geq p_i(t) \cdot v - L(x(t), v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Ne segue

$$p_i(t) \cdot v \leq L(x(t), v) + h_i, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

e quindi

$$|p_i(t)| = \max_{|v| \leq 1} |p_i(t) \cdot v| \leq \max_{|v| \leq 1} |L(x(t), v)| + |h_i|$$

Per le ipotesi fatte su  $L$ , il primo termine a secondo membro si maggiora con una costante indipendente da  $t \in [a, b]$ .

Si ha poi, per certe costanti  $K_n$ ,

$$|\dot{x}(t)| \leq M_1 - 1 \quad \text{q.d. su } [\bar{t}, t_1],$$

$$|L(x(t), \dot{x}(t))| \leq K_1 \quad \text{q.d. su } [\bar{t}, t_1],$$

$$|p_i(t)| \leq K_2 \quad " \quad ,$$

ricordando che  $p_i(t) \in \partial_v L(x(t), \dot{x}(t))$  e che  $L$  è localmente lipschitziana. Ne segue che

$$|h_i| \leq \frac{1}{t_1 - \bar{t}} \int_{\bar{t}}^{t_1} |p_i(t), \dot{x}(t) - L(x(t), \dot{x}(t))| dt \leq K_3 \quad \text{per } i \geq 1$$

e quindi

$$|p_i(t)| \leq K_4 \quad \text{per } \bar{t} \leq t \leq t_i, \quad i \geq 1$$

Ora si applica il Lemma e si ottiene che

$$\Omega \supset [\bar{t}, b],$$

applicando anche il Teorema 1.

In modo analogo si prova che  $\Omega \supset [a, \bar{t}]$ .



3. Vogliamo esporre ora un risultato di esistenza in piccolo che non richiede l'ipotesi di coercività (H3).

Teorema 4. Sia  $(t_0, x_0) \in S$  aperto in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tale che

- i)  $L$  è localmente lipschitziana su  $S \times \mathbb{R}^n$ ,
- ii)  $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto L(t, x, v)$  è strettamente convessa per ogni  $(t, x)$  in  $S$ .

Fissato  $M > 0$ , esistono  $\epsilon, \gamma$  positivi arbitrariamente piccoli tali che, qualunque siano  $a, b, A, B$  verificanti le condizioni

$$a, b \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \quad a < b,$$

$$|A - x_0| \leq \epsilon, \quad |B - x_0| \leq \epsilon,$$

$$|B - A| \leq M(b - a),$$

il problema

$$\min \left\{ \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \mid x(\cdot) \text{ ass. continua, } x(a) = A, \right.$$

$$\left. x(b) = B, \quad |x(t) - x_0| \leq \gamma \text{ per } a \leq t \leq b \right\}$$

ha almeno una soluzione e ogni soluzione è di classe  $C^1$  su  $[a, b]$ .

Tonelli [11] ha dimostrato il seguente

Teorema 4'. Se  $n=1$ , se esistono e sono continue su  $S \times \mathbb{R}$  le funzioni

$$L, L_x, L_u, L_{ux}$$

e se  $L_{\mu}(t, x, \cdot)$  è strettamente crescente per ogni  $(t, x) \in S$ , allora vale la tesi del Teorema 4 e in più si ha per ogni soluzione  $x(\cdot)$  del problema considerato

$$|\dot{x}(t)| \leq M + \varepsilon \quad \text{per } a \leq t \leq b.$$

Corollario 4. Se  $x(\cdot)$  è soluzione del problema (P) considerato nell'Introduzione e se  $L$  è localmente lipschitziana e strettamente convessa rispetto a  $v$ , per ogni  $\tau$  in  $[a, b]$  verificante la condizione

$$\liminf_{\substack{s, t \rightarrow \infty \\ s \leq \tau \leq t \\ s \neq t}} \frac{|x(t) - x(s)|}{t - s} < \infty$$

esiste un intervallo  $I$  relativamente aperto in  $[a, b]$  tale che  $\tau \in I$  e  $x(\cdot)$  è di classe  $C^1$  su  $I$ . Dunque  $x(\cdot) \in C^1(\Omega)$  con  $\Omega$  relativamente aperto in  $[a, b]$  e  $\mu([a, b] \setminus \Omega) = 0$ .

Per ottenere il Corollario 4 del Teorema 4 si prende una successione  $i \rightarrow [a_i, b_i] \subset [a, b]$  tale che  $[a_i, b_i]$  sia un intorno di  $\tau$  aperto relativamente ad  $[a, b]$  e

$$b_i - a_i \rightarrow 0 \quad \text{per } i \rightarrow \infty,$$

$$|x(b_i) - x(a_i)| \leq M(b_i - a_i) \quad \text{per } i \geq 1,$$

per qualche costante  $M < \infty$ . Poi si applica il Teorema 4, con  $t_0 = \tau$ ,  $x_0 = x(\tau)$ , al problema

$$\min \left\{ \int_{a_i}^{b_i} L(t, y, \dot{y}) dt \mid y(\cdot) \text{ ass. cont., } y(a_i) = x(a_i), \right.$$

$$\left. y(b_i) = x(b_i), \quad |y(t) - x(\tau)| \leq \delta \text{ per } a_i \leq t \leq b_i, \quad i \geq 1, \right.$$

con  $\delta > 0$  e  $I_0$  opportuni.

Indichiamo i punti principali della dimostrazione del Teorema 4, seguendo [7].

I) Ci si riconduce al caso di

$$S = [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma] \times \{x \mid |x - x_0| \leq \gamma\}$$

e di  $L$  che verifica la condizione

$$L(t, x, v) \geq \alpha |v| \quad \text{per } (t, x, s) \in S \times \mathbb{R}^n,$$

con  $\gamma > 0$  e  $\alpha > 0$  opportune.

II) Si utilizza la Proposizione 1 per costruire le funzioni

$$L_r: S \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad r > 0,$$

che verificano le condizioni seguenti:

- a)  $L_r$  verifica i) e ii);
- b)  $L_r(t, x, v) = L(t, x, v)$  per  $|v| \leq r$ ,
- c)  $L_r(t, x, v) \geq \max\{\frac{\alpha}{2}|v|, |v|^2 - r^2\}$ ;
- d) esiste  $\rho(r) > 0$  tale che

$$L_r(t, x, v) = |v|^2 - r^2 \quad \text{per } |v| \geq \rho(r).$$

Supposto

$$t_0 - \gamma = a_0 \leq a < b \leq b_0 = t_0 + \gamma,$$

$$|A - x_0| \leq \gamma, \quad |B - x_0| \leq \gamma, \quad |B - A| \leq M(b - a),$$

consideriamo il problema

$$(P_r) \quad \min \left\{ \int_a^b L_r(t, y, \dot{y}) dt \mid y(\cdot) \text{ ass. cont.}, y(a) = A, \right.$$

$$\left. y(b) = B, |y(t) - x_0| \leq \gamma \right\}$$

Allora si ha il seguente

Lemma 2. Esistono  $\epsilon > 0$ ,  $r_0 > 0$  tali che, se

$$|a - t_0| < \epsilon, \quad |b - t_0| < \epsilon, \quad |A - x_0| < \epsilon, \quad |B - x_0| < \epsilon, \quad r \geq r_0,$$

il problema  $(P_r)$  ha una soluzione  $x_r(\cdot) \in C^1([a, b])$  per cui si ha

$$|\dot{x}_r(t)| < r_0, \quad |x_r(t) - x_0| < \gamma \quad \text{per } a \leq t \leq b,$$

$$L(t, x_r(t), \dot{x}_r(t)) = L_r(t, x_r(t), \dot{x}_r(t)) \quad \text{per } a \leq t \leq b.$$

Da quanto detto sopra segue che

$$\int_a^b L(t, x_r, \dot{x}_r) dt = \int_a^b L(t, x_s, \dot{x}_s) dt \quad \text{per } r, s \geq r_0$$

e inoltre che, posto

$$z(t) = x_{r_0}(t), \quad a \leq t \leq b,$$

se  $y(\cdot)$  è una qualunque funzione *lipschitziana* tale che  $y(a)=A, y(b)=B$ ,  
 $|y(t)-x_0| \leq \gamma$ , riesce

$$\int_a^b L(t, z; \dot{z}) dt \leq \int_a^b L(t, y; \dot{y}) dt.$$

III) Esistono delle costanti  $r_1 > 0$ ,  $\bar{\alpha} > \alpha$ ,  $\delta > 0$ ,  $\beta, \lambda$  e le funzioni  $H_k: SxR^n \rightarrow R$ , per  $k > r_1$ , localmente lipschitziane e strettamente convesse in  $v$  tali che

- a)  $H_k(t, x, v) = L(t, x, v)$  per  $|v| \leq r_0$ ,
- b)  $H_k(t, x, v) \leq L(t, x, v) + \frac{1}{k}$  per  $r_0 \leq |v| \leq r_1$ ,
- c)  $H_k(t, x, v) \leq L(t, x, v) - \delta$  per  $r_1 \leq |v| \leq k$ ,
- d)  $H_k(t, x, v) \leq \beta |v| + \lambda$  per  $|v| > k$ ,
- e)  $H_k(t, x, v) \geq \bar{\alpha} |v|$  su  $SxR^n$ .

Procedendo come nel punto II), si prova che esistono  $\epsilon > 0$  e  $r_0 > 0$  tali che, se  $a, b, A, B$  sono come nel Lemma 2, nella classe delle funzioni  $y(\cdot): [a, b] \rightarrow R^n$  *lipschitziane* tali che

$$y(a) = A, y(b) = B, |y(x) - x_0| < \gamma \quad \text{per } a \leq t \leq b$$

ne esiste una  $z(\cdot) \in C^1([a, b])$  verificante le condizioni

$$|\dot{z}(t)| < r_0 \quad \text{per } a \leq t \leq b,$$

$$\int_a^b L(t, z, \dot{z}) dt \leq \int_a^b H_k(t, y, \dot{y}) dt \quad \text{per ogni } y(\cdot), k.$$

Quest'ultima maggiorazione si estende a tutte le funzioni  $y(\cdot)$  *assolutamente continue* verificanti le altre condizioni poste sopra su  $y(\cdot)$  mediante il seguente

Lemma 3. Data  $y(\cdot)$  assolutamente continua come sopra, esiste una successione di funzioni

$$y_i(\cdot): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{N},$$

lipschitziane tale che

$$\max_t |y_i(t) - y(t)| + \int_a^b |y_i(t) - y(t)| dt \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0,$$

$$\int_a^b H_k(t, z_i, \dot{z}_i) dt \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \int_a^b H_k(t, y, \dot{y}) dt.$$

IV) Se la funzione  $y(\cdot)$  non è lipschitziana, l'insieme

$$W = \{t \in [a, b] \mid |\dot{y}(t)| > r_1\}$$

ha misura positiva.

Posto

$$T = \{t \in [a, b] \mid |\dot{y}(t)| \leq r_1\},$$

$$U_k = \{t \in [a, b] \mid r_1 < |\dot{y}(t)| \leq k\},$$

$$V_k = \{t \in [a, b] \mid k < |\dot{y}(t)|\},$$

si ha

$$\begin{aligned}
\int_a^b L(t, z, \dot{z}) dt &\leq \int_a^b H_k(t, y, \dot{y}) dt = \\
&= \int_T H_k(t, y, \dot{y}) dt + \int_{U_k} H_k(t, y, \dot{y}) dt + \int_{V_k} H_k(t, y, \dot{y}) dt \leq \\
&\leq \int_T L(t, y, \dot{y}) dt + \frac{1}{k} \mu(T) + \int_{U_k} L(t, y, \dot{y}) dt - \delta \mu(U_k) + \\
&+ \int_{V_k} (\lambda + \beta |y|) dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_a^b L(t, y, \dot{y}) dt - \delta \mu(W)
\end{aligned}$$

Dunque si ha

$$\int_a^b L(t, z, \dot{z}) dt \leq \int_a^b L(t, y, \dot{y}) dt - \delta \mu(W)$$

e questo prova che ogni soluzioni del problema considerato deve essere lipschitziana e ciò conclude la dimostrazione del Teorema 4.

4. Terminiamo con alcuni esempi.

Esempio 1. Questo esempio è dovuto a Tonelli [10]. E' noto che il problema

$$(P) \quad \min \left\{ \int_0^1 y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \mid x(\cdot), y(\cdot) \text{ ass. continua,} \right.$$

$$\left. y(t) \geq 0 \text{ per } 0 \leq t \leq 1, x(0) = 0, x(1) = 1, y(0) = h = y(1) \right\}$$

ha una unica soluzione, per  $h > 0$  abbastanza grande, data da

$$(*) \quad \begin{cases} x_0(t) = t \\ y_0(t) = \alpha \cosh \frac{1}{\alpha} (t - \frac{1}{2}) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

con  $\alpha > 0$  costante (cfr. [9]).

Fissiamo un nuovo sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $(\xi, \eta)$  in modo che l'asse  $\eta$  sia parallelo alla retta tangente in  $(1, h)$  alla curva  $(*)$ .

Precisamente poniamo

$$\xi = \frac{y_0(1)x - y}{\sqrt{\dot{y}_0(1)^2 + 1}} \equiv ax - by,$$

$$\eta = \frac{x + \dot{y}_0(1)y}{\sqrt{\dot{y}_0(1)^2 + 1}} \equiv bx - ay.$$

Allora si ha  $a^2 + b^2 = 1$  e

$$x = a\xi + b\eta,$$

$$y = -b\xi + a\eta$$

Poniamo anche

$$\xi_0 = -bh, \quad \xi_1 = a-bh.$$

Nelle coordinate  $(\xi, \eta)$  la curva  $(*)$  è rappresentata da



$$\begin{cases} \xi = at - by_0(t) \\ \eta = bt + ay_0(t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

e la funzione

$$\phi(t) = at - by_0(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

è strettamente crescente e quindi invertibile con inversa

$$\psi: [\xi_0, \xi_1] \rightarrow [0, 1].$$

Dunque la curva (\*) è rappresentabile nella forma

$$y = b\psi(\xi) + ay_0(\psi(\xi)) \equiv \eta_0(\xi), \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1,$$

e la funzione  $\eta_0(\cdot)$  è continua per ogni  $\xi$ , è di classe  $C^\infty$  per  $\xi_0 < \xi < \xi_1$  e verifica le condizioni

$$\dot{\eta}_0(\xi_1) = +\infty, \quad \int_{\xi_0}^{\xi_1} |\dot{\eta}_0(\xi)| d\xi < \infty.$$

Consideriamo ora il problema

$$(P') \quad \min \left\{ \int_{\xi_0}^{\xi_1} [-b\xi + a\eta(\xi)] \sqrt{1 + \dot{\eta}(\xi)^2} d\xi \mid \eta(\cdot) \text{ ass. continua,} \right.$$

$$-b\xi + a\eta(\xi) \geq 0 \text{ per ogni } \xi, \eta(\xi_0) = \eta_0(\xi_0), \eta(\xi_1) = \eta_0(\xi_1) \}.$$

Si ha

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} [-b\xi + a\eta(\xi)] \sqrt{1+\dot{\eta}(\xi)^2} d\xi = (\xi = \phi(t))$$

$$= \int_0^1 [-b\phi(t) + a\eta(\phi(t))] \sqrt{1+\dot{\eta}(\phi(t))^2} \dot{\phi}(t) dt.$$

Se poniamo

$$\begin{aligned} y(t) &= -b\phi(t) + a\eta(\phi(t)), \\ 0 &\leq t \leq 1, \\ x(t) &\leq a\phi(t) + b\eta(\phi(t)), \end{aligned}$$

otteniamo

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = [1+\dot{\eta}(\phi(t))^2] \dot{\phi}(t)^2,$$

e quindi, essendo  $y(t) \geq 0$ ,  $y(0) = h = y(1)$ ,  $x(0) = 0$  e  $x(1) = 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\xi_0}^{\xi_1} [-b\xi + a\eta(\xi)] \sqrt{1+\dot{\eta}(\xi)^2} d\xi &= \int_0^1 y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \geq \\ &\geq \int_0^1 y_0(t) \sqrt{1+\dot{y}_0(t)^2} dt = \int_{\xi_0}^{\xi_1} [-b\xi + a\eta_0(\xi)] \sqrt{1+\dot{\eta}_0(\xi)^2} d\xi \end{aligned}$$

pertanto  $\eta_0(\cdot)$  è soluzione del problema (P') e si ha  $\Omega = [\xi_0, \xi_1[$ . Osserviamo che la lagrangiana del problema (P'), data da

$$L(\xi, \eta, \theta) = (-b\xi + a\eta) \sqrt{1+\theta^2},$$

verifica le ipotesi del Teorema 4 nell'aperto:  $-b\xi + a\eta > 0$ , che contiene il grafico di  $\eta_0(\cdot)$ , poiché  $L_{\theta\theta} = (-b\xi + a\eta)(1 + \theta^2)^{-3/2}$ .

Esempio 2. Può essere  $\Omega = [a, b]$  anche nelle condizioni del Teorema 1.

Un esempio, dovuto a Ball e Mizel [2], è dato da

$$L(t, x, u) = (t^2 - x^3)^2 u^{14} + \epsilon u^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

E' possibile scegliere  $\epsilon > 0$  e  $k > 0$  in modo che il problema

$$\min \int_0^1 L(t, x, \dot{x}) dt \mid x(\cdot) \text{ ass. continua, } x(0) = 0, x(1) = k$$

abbia come unica soluzione la funzione

$$x(t) = kt^{2/3}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La dimostrazione si trova in [2] e [4].

Esempio 3. Fissato a piacere  $\Omega$  aperto in  $[-1, 1]$  con  $\text{mis}([-1, 1] \setminus \Omega) = 0$ , in [2] è costruito un esempio di problema

$$\min \int_{-1}^1 L(x, \dot{x}) dt \mid x(\cdot) \text{ ass. continua, } x(-1) = k_1, x(1) = k_2$$

per il quale si ha  $L \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $L_{uu} > 0$ ,

$$|u| \leq L(x, u) \leq C(1 + u^2),$$

$$\frac{L(x, u)}{|u|} \xrightarrow{|u| \rightarrow \infty} \infty \quad \text{per quasi ogni } x \in \mathbb{R},$$

ed esiste una unica soluzione  $x(\cdot)$  crescente strettamente e tale che

$$\dot{x}(t) = +\infty \Leftrightarrow t \notin \Omega,$$

$$L_x(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) \notin L^1_{loc}(-1, 1).$$

Esempio 4. Poniamo

$$I(x) = \int_0^1 [(t^4 - x(t)^6)^2 |\dot{x}(t)|^s + \epsilon \dot{x}(t)^2] dt$$

Per ogni  $s \geq 2$  e  $k > 1$  esiste  $\epsilon > 0$  tale che ogni soluzione (ne esistono) del problema

$$\min\{I(x) \mid x(0)=0, x(1)=k, x(\cdot) \text{ ass.continua}\} = m$$

ha l'insieme  $\Omega = ]0, 1[$ . Si ha inoltre

$$m < \inf\{I(x) \mid x(0)=0, x(1)=k, x(\cdot) \text{ ass.continua}, \dot{x}(\cdot) \in L^q(0, 1)\}$$

per ogni  $q$  tale che  $3 \leq q \leq +\infty$ . Anche per questo rimandiamo a [2].

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.P. AUBIN, A. CELLINA: Differential inclusions. Springer, 1984.
- [2] J.M. BALL, V.J. MIZEL: One dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equation. Arch. Rat. Mech. Anal. (1985), 325-88.
- [3] L. CESARI: Optimization-theory and applications. Springer, 1983.
- [4] F.H. CLARKE: Optimization and nonsmooth analysis. Wiley-Interscience, New York, 1983.
- [5] F.H. CLARKE, R.B. VINTER: On the conditions under which the Euler equation or the maximum principle hold. Appl. Math. Optim. 12 (1984), 73-79.
- [6] F.H. CLARKE, R.B. VINTER: Regularity properties of solutions of the basic problem in the calculus of variations. Trans. A.M.S. 289 (1985), 73-98.
- [7] F.H. CLARKE, R.B. VINTER: Existence and regularity in the small in the calculus of variations. Journal of Diff. Eq. 59(1985), 336-54.
- [8] L. TONELLI: Sur une methode directe du calcul des variations. Rend. Circ. Math. Palermo 39 (1915), 233-64; oppure "Opere Scelte", vol. 2, Cremonese, Roma, 1961.
- [9] L. TONELLI: Fondamenti di calcolo delle variazioni, Vol. I, II, Zanichelli, Bologna, 1921, 1923.
- [10] L. TONELLI: Sulla proprietà delle estremanti. Annali Sc. Norm. Supp. Pisa, III (1934), 213-37; oppure "Opere Scelte", vol. III, Cremonese, Roma, 1962.
- [11] L. TONELLI: Sulle equazioni di Eulero nel calcolo delle variazioni. Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, IV (1935), 191-216; oppure "Opere Scelte", vol. III, Cremonese, Roma, 1962.